أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الجداء السلمي وتطبيقاته

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: ليكن $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساسا في الفضاء $\vec{u}(1;5;-1)$ و $\vec{v}(-5;1;0)$ و $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

1) هل المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين ؟

2) أحسب : $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{w}\|$

الجواب:1) نحسب الجداء السلمي :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-5)\times1+1\times5+0\times(-1)=(-5)+5=0$$

ومنه : $\vec{u}\perp\vec{v}$

2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{(1)^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{1+25+1}=\sqrt{27}$

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

تمرين2: $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ **معلم متعامد ممنظم مباشر للفضاء**

نعتبر النقط : $A(1;0;-1)$ و $B(1;2;-1)$ والمتجهات :

$\vec{u}(3;-2;1)$, $\vec{v}(2;1;0)$

1) أحسب المسافة بين النقطتين A و B

2) أحسب $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

الجواب:

1) المسافة بين النقطتين A و B هي:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

أي : $AB=\sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2}=1$

2)
$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}=\frac{4}{\sqrt{70}}$$

تمرين3: نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المتجهة $\vec{u}(2;1;-1)$

حدد (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$.

الجواب: لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

لدينا: $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

$\Leftrightarrow 2(x-1)+(y+1)-(z-2)=-1$

$\Leftrightarrow 2x+y-z+2=0$. هذه المعادلة تكتب على الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

إذن المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته:

$$2x+y-z+2=0$$

تمرين4: حدد متجهة منظمية على المستوى (P) في الحالات التالية :

1) $(P)\ 2x-3y+z+10=0$ 2) $(P)\ 3x-z+1=0$

3) $(P)\ y+z+1=0$ 4) $(P)\ z=2$

5) $(P):x-2y+7z-3=0$ 6) $(P):2y-z+11=0$

أجوبة: 1) $\vec{n}(2;-3;1)$ 2) $\vec{n}(3;0;-1)$ 3) $\vec{n}(0;1;1)$

4) $\vec{n}(0;0;1)$ 5) $\vec{n}(1;-2;7)$ 6) $\vec{n}(0;2;-1)$

تمرين5: نعتبر في الفضاء المتجهة $\vec{n}(1;2;1)$ و النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(3;1;0)$.

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A و $\vec{n}$ متجهة منظميه عليه.

2) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B والعمودي على المستوى (P).

3) حدد مثلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

أجوبة: 1) تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (P) :

طريقة1: $M(x;y;z)\in(P)$ يعني $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

يعني $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-2)$

$(x+1)\times1+y\times2+1\times(z-2)=0$

يعني $x+1+2y+z-2=0$ يعني $(P)\ x+2y+z-1=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستوى تكتب على الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\vec{n}(1;2;1)$ متجهة منظميه عليه اذن :

$a=1$ و $b=1$ و $c=1$

ومنه : $(P)\ 1x+2y+1z+d=0$

و نعلم أن: $A(-1;0;2)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $(-1)+2\times0+1\times2+d=0$ يعني $d=-1$

وبالتالي : $(P)\ x+2y+z-1=0$

2) تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (D):

(D) يمر من النقطة B و عمودي على المستوى (P).

اذن : $\vec{n}(1;2;1)$ متجهة موجهة ل (D) و $B(3;1;0)\in(D)$

إذن: $\begin{cases} x=1k+3 \\ y=2k+1 \\ z=1k+0 \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{R}$ وهو تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

3) B' هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

اذن: $B'\in(P)$ و $B'\in(D)$

ومنه نحل النظمة التالية: $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x=1k+3 \\ y=2k+1 \\ z=1k+0 \end{cases}$

يعني $k+3+2(2k+1)+k-1=0$ يعني $6k+4=0$

يعني $k=-\frac{2}{3}$ ومنه: $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3} \\ y=-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3} \\ z=-\frac{2}{3}+0 \end{cases}$

ومنه: $B'\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

تمرين6: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد ب $A(-5;2;-1)$ و $\vec{n}(2;1;-2)$ متجهة منظمية عليه

الجواب: نعتبر: $M(x;y;z)\in(P)$

$M(x;y;z)\in(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$M(x;y;z)\in(P) \Leftrightarrow 2(x+5)+(y-2)-2(z+1)=0$

$M(x;y;z)\in(P) \Leftrightarrow 2x+y-2z+6=0$

و منه: $\boxed{(P):\ 2x+y-2z+6=0}$

تمرين7: نعتبر في الفضاء النقطة $A(5;1;0)$ و المستوى (P) الذي معادلته $x+2y+2z-6=0$

أحسب: $d(A;(P))$

الجواب: $d(A;(P))=\frac{|5+2\times1+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|1|}{3}=\frac{1}{3}$

تمرين8: $(P):\ -3x+2y+z+2=0$

ليكن: $(D)\perp(P)$ **و** $B(-2;2;3)\in(D)$

1) احسب: $d(B;(P))$ **2) حدد تمثيلا بارامتريا ل** (D)

أجوبة: 1) $d(B;(P))=\frac{|-3\times-2+2\times2+3+2|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{15}{\sqrt{14}}$

2) **لدينا:** $(P):\ -3x+2y+z+2=0$

إذن: $\vec{n}(-3;2;1)$ **متجهة منظمية على** (P)

و بما أن: $(D)\perp(P)$ **فإن:**

$\vec{n}(-3;2;1)$ **متجهة موجهة ل** (D)

و لدينا: $B(-2;2;3)\in(D)$

إذن: $\boxed{(D):\begin{cases} x=-3t-2 \\ y=2t+2 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t+3 \end{cases}}$

تمرين9: حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) في الحالات التالية:

1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R=4$.

2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

أجوبة: 1) (S) مركزها $\Omega(1;2;-3)$ و شعاعها $R=4$.

اذن: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد:

$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+6z+9=16$

يعني: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

وهي تكتب على الشكل التالي: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

2) (S) مركزها $\Omega(0;-1;1)$ و تمر من النقطة $A(1;2;-1)$

يعني: $\Omega A=R$

نحسب المسافة ΩA:

$R=\Omega A=\sqrt{(1-0)^2+(2+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكةهي:

$(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}^2$

يعني: $(S)\ x^2+y^2+z^2+2y-2z-12=0$

تمرين10: حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$ نضع: $A(1;0;-1)$ و $B(1;2;-1)$.

الجواب: ***طريقة1***

مركزها Ω هو منتصف القطعة $[AB]$

اذن: $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ اذن: $\Omega(1;1;-1)$

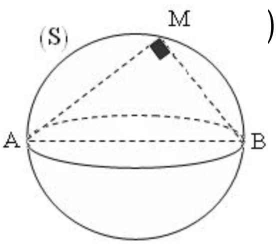
ولدينا أيضا: $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2}}{2}=1$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكةهي:

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1^2$

يعني: $(S)\ x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

***طريقة2**:نستعمل الخاصية:* (



$B(1;2;-1)$

$M\in(S)$ يعني $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

لدينا $\overrightarrow{MA}(1-x;0-y;-1-z)$ و

$\overrightarrow{MB}(1-x;2-y;-1-z)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ يعني

$(1-x)\times(1-x)+-y(2-y)+(-1-z)(-1-z)=0$

يعني $(1-x)^2+-y(2-y)+(-1-z)^2=0$

$(S)\ x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

تمرين11: حدد مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلات التالية:

1) $(E_1): x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+6=0$

2) $(E_2): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+6=0$

3) $(E_3): x^2+y^2+z^2-x+3y+2z+\frac{9}{2}=0$

أجوبة : 1) $(E_1): x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+6=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا : $a=-6$ و $b=4$ و $c=-6$ و $d=6$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$$a^2+b^2+c^2-4d=36+16+36-24=64>0$$

ومنه : (E_1) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(3;-2;3)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$

2) $(E_2): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+6=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا : $a=-4$ و $b=2$ و $c=2$ و $d=6$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$$a^2+b^2+c^2-4d=16+4+4-24=0$$

ومنه : (E_2) هي النقطة $(E_2)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)\right\}$ أي

$$(E_2)=\{\Omega(2;-1;-1)\}$$

3) $(E_3): x^2+y^2+z^2-x+3y+2z+\frac{9}{2}=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا : $a=-1$ و $b=3$ و $c=2$ و $d=\frac{9}{2}$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$$a^2+b^2+c^2-4d=1+9+4-18=-4<0$$

ومنه : (E_3) هي المجموعة الفارغة.

تمرين12: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0$$

و (D) المستقيم المار من $A(0;5;1)$ و $\vec{n}(2;1;-2)$ متجهة موجهة له

1) حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب 1: تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

2) نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5=0 \\ x=2t \\ y=5+t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$(2t)^2+(5+t)^2+(1-2t)^2+6\times2t-4(5+t)-2(1-2t)+5=0$$

$9t^2+18t+9=0$ يعني $t^2+2t+1=0$

لدينا: $\Delta=0$ اذن للمعادلة حل حقيقي مزدوج $t=\frac{-b}{2a}=-1$

نعوض t ب -1 في التمثيل البارامتري ل (D)

فنجد : $\begin{cases} x=-2 \\ y=4; \\ z=3 \end{cases}$ ومنه هناك نقطة وحيدة مشتركة بين (S) و (D)

هي: $T(-2;4;3)$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطة وحيدة مشتركة هي T

اذن المستقيم (D) **مماس للفلكة** (S) **في النقطة** T.

تمرين13: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$$

و (D) المستقيم المعرف بما يلي: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+t \end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب :

نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 \\ x=-1+2t \\ y=2-2t \\ z=-1+t \end{cases}$$

$$(-1+2t)^2+(2-2t)^2+(-1+t)^2-4\times(-1+2t)-2(2-2t)-1=0$$

$9t^2-18t+5=0$ لدينا: $\Delta=18^2-4\times9\times5=324-180=144=12^2$

اذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $t_1=\frac{1}{3}$ و $t_2=\frac{5}{3}$

نعوض t ب $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{3}$ في التمثيل البارامتري ل (D) فنجد نقطتين:

هما : $A\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{3}; \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases}$ و $B\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=-\frac{4}{3}; \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$ و $A\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$B\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) لهما نقطتان مشتركتان هما A و B نقول:

إذن **المستقيم** (D) **قاطع للفلكة** (S).

تمرين14لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$ و (D) المستقيم

المعرف بما يلي: $\begin{cases} x=0 \\ y=t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

الجواب :

نحل النظمة التالية : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0 \\ x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

$0^2+t^2+t^2-2\times0+4t-2t+4=0$

$2t^2+2t+4=0$ يعني $t^2+t+2=0$ لدينا: $\Delta=1^2-4\times2=-7<0$

اذن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

ومنه المستقيم (D) يوجد خارج الفلكة (S). يعني :

$(S)\cap(D)=\varnothing$

تمرين15: تكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$(S):\ x^2+y^2+z^2=6$

و $A(1;1;-2)$ و $\vec{u}(-3;2;1)$

ادرس تقاطع المستقيم : $D(A;\vec{u})$ و (S)

الجواب : $M(x;y;z)\in(D)\cap(S)$

نبحث عن : تمثيل بارامتري ل (D):

يعني : $M(x;y;z)\in(S)$ و $\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$

إذن: $(1-3t)^2+(1+2t)^2+(-2+t)^2=6$

يعني : $14t^2-6t+6=6$ **يعني :** $14t^2-6t=0$

يعني : $t(7t-3)=0$ **يعني :** $t=0$ **أو** $t=\dfrac{3}{7}$

ومنه : $M(1;1;-2)\ ;\ M\left(\dfrac{-2}{7};\dfrac{13}{7};\dfrac{-13}{7}\right)$

إذن : $(D)\cap(S)=\left\{A(1;1;-2)\ ;\ B\left(\dfrac{-2}{7};\dfrac{13}{7};\dfrac{-13}{7}\right)\right\}$

تمرين16:لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ والمستوى (P) المعرف

بالمعادلة: $2x+y+2z-3=0$

1)حدد المركز Ω للفلكة (S)وشعاعها R

2)أحسب : $d(\Omega;(P))$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة في نقطة وحيدة T

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4)استنتج احداثيات T نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (P)

أجوبة : 1) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا : $a=2$ و $b=-2$ و $c=2$ و $d=-1$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=4+4+4+4=16>0$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(-1;1;-1)$

و شعاعها هو: $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\dfrac{\sqrt{16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

2) $2x+y+2z-3=0$ و $\Omega(-1;1;-1)$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2\times(-1)+1+2\times(-1)-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|6|}{3}=\frac{6}{3}=2=R$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة في نقطة وحيدة T

نقول (P) مماس للفلكة (S) في T

3) (Δ) يمر من Ω وعمودي على (P)ونعلم أن : $\vec{n}(2;1;2)$ متجهة منظمية على (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو : $(\Delta)\begin{cases} x=2t-1 \\ y=1t+1;(t\in\mathbb{R}) \\ z=2t-1 \end{cases}$

4) $T(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=1t+1;(t\in\mathbb{R}) \\ z=2t-1 \end{cases}$ و $(P)\ 2x+y+2z-3=0$

اذن : $2(2t-1)+(t+1)+2(2t-1)-3=0$

يعني $9t-6=0$ يعني $t=\dfrac{2}{3}$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد

$\begin{cases} x=2\times\dfrac{2}{3}-1 \\ y=1\times\dfrac{2}{3}+1;(t\in\mathbb{R}) \\ z=2\times\dfrac{2}{3}-1 \end{cases}$ ومنه : $T\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ **نقطة التماس**

تمرين17: لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(2;0;1)$ شعاعها $R=3$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $x-2y+z+3=0$

1)حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S)

2)أحسب : $d\left(\Omega;(P)\right)$ وتأكد أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4)استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

أجوبة : 1) اذن : $(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد :

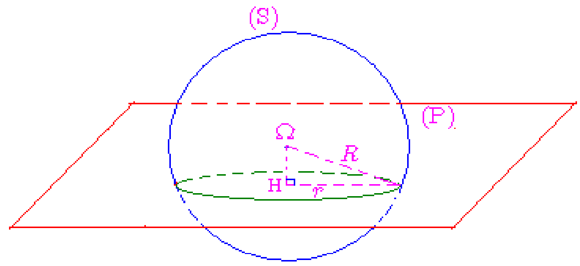
$x^2-4x+4+y^2+z^2-2z+1=9$

يعني : $x^2+y^2+z^2-4x-2z-4=0$

2) $x-2y+z+3=0$ و $\Omega(2;0;1)$

$$d\left(\Omega;(P)\right)=\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<R=3$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



نلاحظ أننا نحصل على مثلث قائم الزاوية في H

ومنه حسب فيتاغورس فان : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$r=\sqrt{3^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$

3) $x-2y+z+3=0$ (P) و $\Omega(2;0;1)$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن : $\vec{n}(1;-2;1)$ **متجهة منظمة على** (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو : $(\Delta)\begin{cases}x=1t+2\\ y=-2t;(t\in\mathbb{R})\\ z=1t+1\end{cases}$

4) $H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$(\Delta)\begin{cases}x=1t+2\\ y=-2t;(t\in\mathbb{R})\\ z=1t+1\end{cases}$ و (P) $x-2y+z+3=0$

اذن : $(t+2)-2(-2t)+(t+1)+3=0$

يعني $6t+6=0$ يعني $t=-1$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد:

$\begin{cases}x=-1+2\\ y=-2(-1)\\ z=-1+1\end{cases}$ ومنه : $H(1;2;0)$ **مركز** الدائرة (C)

تمرين18: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي:

$x^2+y^2+z^2-2x=0$, و المستوى (P)

الذي معادلته الديكارتية هي: $x+y-z+2=0$

1)حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

2)أحسب : $d\left(\Omega;(P)\right)$ ماذا تستنتج ؟

أجوبة : 1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-2$ و $b=0$ و $c=0$ و $d=0$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=4>0$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(1;0;0)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

2) $x+y-z+2=0$ و $\Omega(1;0;0)$

$$d\left(\Omega;(P)\right)=\frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R=1$$

ومنه : (P) يوجد خارج الفلكة (S) أو لا يقطع الفلكة

تمرين19: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها الديكارتية هي :

$(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z=5$

والمستوى (P) المعرف ب $(P):2x-2y+z+3=0$

1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

2)بين أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

4)استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

أجوبة : 1) $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z=5$

على الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

اذن لدينا: $a=-2$ و $b=6$ و $c=2$ و $d=-5$

نحسب : $a^2+b^2+c^2-4d$

$a^2+b^2+c^2-4d=64>0$

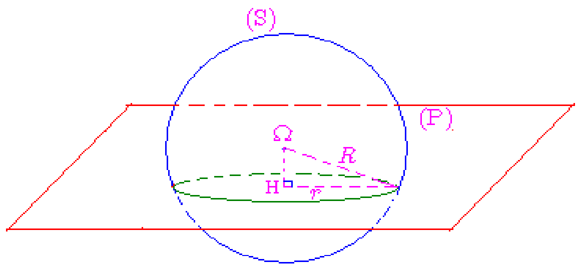
ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(1;-3;-1)$

و شعاعها هو: $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$ أي: $R=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$

2) $(P):2x-2y+z+3=0$ و $\Omega(1;-3;-1)$

$$d\left(\Omega;(P)\right)=\frac{|2+6-1+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|10|}{3}=\frac{10}{3}<R=4$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



$$r=\sqrt{4^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{16-\frac{100}{9}}=\sqrt{\frac{44}{9}}=\frac{\sqrt{44}}{3}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$$

3) $(P): 2x-2y+z+3=0$ و $\Omega(1;-3;-1)$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن : $\vec{n}(2;-2;1)$ **متجهة منظمية على** (P)

اذن تمثيل بارامتري ل (Δ) هو : $(\Delta)\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t-3;(t\in\mathbb{R})\\ z=1t-1\end{cases}$

4) $H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

$(P): 2x-2y+z+3=0$ و $(\Delta)\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t-3\\ z=1t-1\end{cases}$

اذن : $2(2t+1)-2(-2t-3)+(t-1)+3=0$

يعني $9t+10=0$ يعني $t=-\frac{10}{9}$ وبالتعويض في التمثيل البارامتري نجد

ومنه : $\begin{cases}x=-\frac{11}{9}\\ y=-\frac{7}{9}\\ z=-\frac{19}{9}\end{cases}$ $H\left(-\frac{11}{9};-\frac{7}{9};-\frac{19}{9}\right)$ **مركز الدائرة** (C)

تمرين20:

$S(\Omega;R): x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=5$

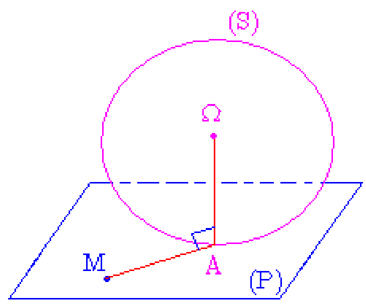
1) بين أن : $A(2;-1;0)\in(S)$

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) **المماس ل** (S) **في** A

الجواب :

1)نعوض باحداثيات في معادلة الفلكة ونجد أنها تحقق المعادلة

$(S): 2^2+(-1)^2+0^2+2\times2+4\times(-1)-6\times0=5$



2) $S(\Omega;R): x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=5$

نحدد مركز الفلكة : $a=2$ و $b=4$ و $c=-6$

ومنه : (S) فلكة مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ أي : $\Omega(-1;-2;3)$

لتكن : $M(x;y;z)$ $A(2;-1;0)$

$M(x;y;z)\in(P)$ يعني $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\overrightarrow{AM}(x-2;y+1;z)$ و $\overrightarrow{A\Omega}(-3;-1;3)$

يعني $-3(x-2)-(y+1)+3z=0$

يعني $(P)\ -3x-y+3z+5=0$